Dr. ŁUCYAN EMIL BÖTTCHER.

KILKA SŁÓW

Z DZIEDZINY

RACHUNKU ITERACYJNEGO.

Odbitka z „Czasopisma Technicznego“.

LWÓW.

NAKŁADEM TOWARZYSTWA POLITECHNICZNEGO.

Z I. ZWIĄZKOWEJ DRUKARNI WE LWOWIE, UL. LINDEGO 4.

1899.

Dr. ŁUCYAN EMIL BÖTTCHER.

KILKA SŁÓW

Z DZIEDZINY

RACHUNKU ITERACYJNEGO.

Odbitka z „Czasopisma Technicznego“.

LWÓW.
NAKŁADEM TOWARZYSTWA POLITECHNICZNEGO.
Z I. ZWIĄZKOWEJ DRUKARNI WE LWOWIE, UL. LINDEGO 4.
1899.

Pojęcie iteracyi danej funkcyi $f(z)$ o wykładniku danym q, czyli iteracyi o danej podstawie $f(z)$ i wykładniku q możemy najlepiej wyjaśnić na drodze analogii.

1. Iloczyn danej liczby A, przez całkowitą, dodatnią dajmy na to n potęgę liczby a, otrzymujemy mnożąc liczbę A przez liczbę a raz po razie tyle razy, ile jest jednostek w liczbie n t. j. n razy.

Iteracyę o danej podstawie $f(z)$ i całkowitym dodatnim wykładniku, którym jest dajmy na to liczba n t. j. funkcyę $f_n(z)$ otrzymujemy, stosując do zmiennej z działanie znakiem f wyrażone raz po razie tyle razy, ile jest jednostek w liczbie n t. j. n razy.

2. Iloczyn danej liczby A przez całkowitą ujemną, dajmy na to $-n$tą potęgę liczby a otrzymujemy, rozwiązując równanie $A = a^n x$ $x = Aa^{-n}$.

Iteracyę o danej podstawie $f(z)$ i całkowitym ujemnym wykładniku, którym dajmy na to jest liczba $-n$ t. j. funkcyę $f_{-n}(z)$ otrzymujemy, rozwiązując równanie algebraiczne resp. przestępne $f_n(y) = z$ $y = f_{-n}(z)$.

3. Iloczyn danej liczby A przez ułamkową, dajmy na to $\frac{m}{n}$ tą potęgę liczby a otrzymujemy, rozwiązując równanie $A^n a^m = x^n$ $x = A a^{\frac{m}{n}}$.

Iteracyę o danej podstawie $f(z)$ i ułamkowym wykładniku, którym jest dajmy na to liczba $\frac{m}{n}$ otrzymu-

jemy, rozwiązując równanie funkcyjne $\varphi_n(z)=f_m(z)$, zkąd $\varphi(z)=f_{\frac{m}{n}}(z)$.

Dodaję, że iteracyę o wykładniku q i podstawie $f(z)$ oznaczamy w następujący sposób:

$$f_q(z)=\mathrm{I}_{f(t)}^{q}(z) \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

Powyższy sposób pozwala nam pojąć, co znaczy iteracya o wykładniku całkowitym dodatnim, całkowitym ujemnym, ułamkowym dowolnego znaku, a na podstawie metody wartości granicznych również iteracya o wykładniku niewymiernym.

Gdybyśmy chcieli pojąć, co znaczy iteracya o dowolnym urojonym, lub zespolonym wykładniku, wówczas nie znaleźlibyśmy żadnych danych, któreby nam sprawę wyjaśniły.

Musimy tedy próbować na drodze intuicyjnej dociec sprawy w nadziei na pomyślny przebieg jej. Uczynimy to w następujący sposób:

4. Chcąc określić dowolną potęgę liczby a, a więc zarówno rzeczywistą, jak i urojoną, oprzemy się na następującem, analitycznie już stwierdzonym fakcie:

Do każdej liczby a możemy dołączyć taką liczbę p, jej logarytm naturalny, że zachodzą wzory:

$$\lim_{n=\infty}\left(1+\frac{p}{n}\right)^n=a. \qquad \lim_{n=\infty}\left(1+\frac{pq}{n}\right)^n=a^q.$$

Chcąc określić dowolną iteracyę funkcyi $f(z)$, a więc zarówno iteracyę o rzeczywistym, jak i o urojonym, lub zespolonym wykładniku, oprzemy się na następującym fakcie, którego stwierdzanie na analitycznej drodze jest w toku z pomyślnym przebiegiem:

Do każdej funkcyi $f(z)$ możemy dołączyć taką funkcyę $F(z)$, jej funkcyał iteracyjny, że zachodzą wzory:

$$\lim_{n=\infty} \mathrm{I}^{n}_{t+\frac{1}{n}F(t)}(z)=f(z) \qquad \lim_{n=\infty} \mathrm{I}^{n}_{t+\frac{p}{n}F(t)}(z) = \mathrm{I}^{p}_{f(t)}(z) \quad . \; . \; (2)$$

Konstrukcya funkcyi $F(z)$, funkcyału iteracyjnego danej funkcyi $f(z)$ jest nadzwyczaj trudnem zagadnieniem, którego dyskusya ze stanowiska funkcyjno-teoretycznego stanowi bardzo ciekawy temat.

To też nie mogąc tematu tego omówić w całej jego rozciągłości, musimy ograniczyć się na tych kilku faktach, które udało się dotąd z całą stanowczością stwierdzić. Dowodów dla braku miejsca tu nie podajemy.

A) Jeżeli wyrazy szeregu $z\ f(z)\ f_2(z) \ldots f_n(z)$ zbiegają do jakiejś wartości granicznej, to jest nią albo jeden z pierwiastków równania $f(x) - x=0$, dający jednak $o \leqq |f^{(1)}(x)| \leqq 1$, albo też ∞, jeżeli $f(\infty)=\infty$, a zarazem

$$1 \leqq \lim_{w=\infty} \left|\frac{f(w)}{w}\right| \leqq \infty$$

Jeżeli mamy $o < |f^{(1)}(x)| < 1$ to dla wszystkich wartości z dających $\lim\limits_{n=\infty} f_n(z)=x$ funkcyał iteracyjny $F(z)$ otrzymujemy na mocy wzoru

$$F(z)=q \lim_{n=\infty} \left\{ \frac{f_n(z) - x}{f_n^{(1)}(z)} \right\} \quad . \; . \; . \; (3)$$

tutaj q jest liczbą stałą i równą $lg\, f^{(1)}(x)$.

Prawdziwość zasady (2) stwierdzono z całą ścisłością, pod tym jednak warunkiem, żeby wartość bezwzględna $|p|$ nie była zbyt wielką.

Jeżeli mamy $f^{(1)}(x)=0$, wówczas musimy dyskusyę nieco inaczej poprowadzić. Wprawdzie funkcyał iteracyjny znaleźliśmy, a to na mocy wzoru:

$$F(z) = q \lim_{n=\infty} \left\{ \frac{\{f_n(z) - x\}\, lg \{f_n(z) - x\}}{f_n^{(1)}(z)} \right\} . \quad (4)$$

tutaj jednak nie wyznaczyliśmy stałej q i nie zbadaliśmy jeszcze stosowalności prawa (2). Podobnież rzeczy stoją z wypadkiem $|f^{(1)}(x)| = 1$.

B) Teraz zwróćmy naszą uwagę na takie pierwiastki równania $f(\xi) - \xi = 0$, które dają $\infty > |f^{(1)}(\xi)| > 1$.

Tutaj udało nam się okazać z całą ścisłością prawdziwość następujących dwóch praw:

$$\lim_{n=\infty} f_n\left[x + \frac{t}{(f^{(1)}(x))^n}\right] = z$$

$$\lim_{n=\infty} f_n\left[x + \frac{t(f^{(1)}(x))^q}{(f^{(1)}(x))^n}\right] = f_q(z) \quad . \quad . \quad (5)$$

według których lewe strony powyższych wzorów wyznaczają skończone oznaczone wartości graniczne dla wszelkich możliwych wartości t i q.

Funkcyał iteracyjny funkcyi $f(z)$ otrzymamy na mocy wzorów:

$$z = \lim_{n=\infty} f_n\left[x + \frac{t}{(f^{(1)}(x))^n}\right]$$

$$F(z) = q \lim_{n=\infty} \frac{f_n^{(1)}\left[x + \dfrac{t}{(f^{(1)}(x))^n}\right]}{(f^{(1)}(x))^n} \qquad q = lg f^{(1)}(x) . \quad (6)$$

W ten sposób kwestya, czy iteracya o dowolnym wykładniku q jest funkcyą, mającą byt analitycznie zapewniony, a nie jest mrzonką, opartą na analogii w gruncie rzeczy mało wiarogodnej prawomocności jest rozstrzygniętą w sposób pozytywny.

Kwestya wyrachowalności iteracyi o dowolnym wykładniku q i funkcyjno-teoretycznych jej własności jest tylko kwestyą czasu.

Zwracam w końcu uwagę na następujące ciekawe prawa.

a) Funkcyał iteracyjny wypływa z wzoru:

$$\lim_{q=0} \frac{f_q(z)-z}{q} = F(z) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

b)

$$\frac{\partial}{\partial q}\Big[f_q(z)\Big] = F\Big[f_q(z)\Big];$$

$$\frac{\partial}{\partial q}\Big[f_q(z)\Big] = F(z) . \frac{\partial}{\partial z}\Big[f_q(z)\Big] \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

c)

$$\frac{\partial^2}{\partial z\, \partial q}\Big[f_q(z)\Big] \frac{\partial}{\partial q}\Big[f_q(z)\Big] -$$

$$- \frac{\partial}{\partial z}\Big[f_q(z)\Big] \frac{\partial^2}{\partial q^2}\Big[f_q(z)\Big] = 0 \quad . \quad . \quad (9)$$

d)

$$f_q^{(1)} f_r(z) = e^{\int_r^{q+r} F f_u(z) \,.\, du} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$